Prof. Dr. H. Faßbender, Dipl.-Math. A. Soppa
Institut *Computational Mathematics*
Technische Universität Braunschweig

Wintersemester 09/10
5.1.2010

Mathematik für Medienwissenschaftler/innen

Klausurübungen

Aufgabe 1 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

a) Normieren Sie die Vektoren

i) v_1

ii) v_2

iii) v_3

iv) u_3.

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren

i) v_1 und v_2.

ii) v_2 und u_2.

iii) u_1 und u_2.

iv) u_1 und u_3.

c) Sind folgende drei Vektoren linear unabhängig?

i) v_1, v_2, v_3

ii) u_1, u_2, u_3

iii) v_1, u_1, u_2

iv) u_1, v_2, v_3

Lösung:

a) i) $\|v_1\| = \sqrt{14}$,

$$\frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

ii) $\|v_2\| = \sqrt{5}$,

$$\frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},$$

iii) $\|v_3\| = 2\sqrt{5}$,

$$\frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

iv) $\|u_3\| = \sqrt{3}$

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

b) i) $\alpha = \arccos\left(\frac{v_1^T v_2}{\|v_1\|\|v_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{5}}\right)$
ii) $v_2^T u_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$
iii) $\alpha = 90°$
iv) $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

c) i)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$$

Nicht linear unabhängig. Oder wir erkennen einfach, dass $v_3 = -2v_2$.

ii)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

Linear unabhängig.

iii) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6 - 2 = 4 \Rightarrow$ Linear unabhängig.

iv) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ Nicht linear unabhängig.

Aufgabe 2 a) Dividieren Sie das Polynom $p(x) = x^3 - 7x + 6$ durch das Polynom $f(x) = x + 3$. Welche Nullstellen besitzt $p(x)$?

b) Sei $f(x, y) = \frac{3y^2}{x} + y$. $\mathcal{B}$ sei der durch $x = 3$, $y = 0$ und $y = 2x$ berandete Bereich. Berechnen Sie $\int\int_{\mathcal{B}} f(x, y)\, dxdy$.

Lösung:

a)
$$
\begin{array}{l}
(x^3 + \quad 0 \quad - 7x + 6) : (x + 3) = \overbrace{x^2 - 3x + 2}^{r(x)} \\
\underline{x^3 \ + \ 3x^2} \\
\qquad -3x^2 - 7x \\
\qquad \underline{-3x^2 - 9x} \\
\qquad\qquad\quad 2x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Die Nullstellen von $r(x) = x^2 - 3x + 2$ sind $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.
Das Polynom $p(x)$ besitzt somit die drei Nullstellen: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

b) Den beschriebenen Bereich kann man wie folgt parametrisieren:
$x \in [0, 3]$, $y_a = 0$ und $y_b(x) = 2x$.

Damit erhält man:

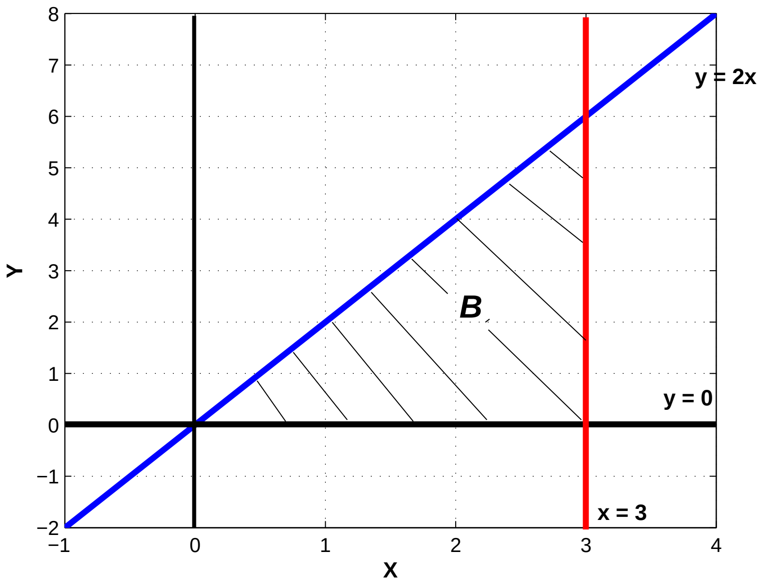

Figure 1: Darstellung des Integrationsbereichs für Aufgabe 2b.

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^3 \left(\int_0^{2x} \frac{3y^2}{x} + y\,dy \right)\,dx \\
&= \int_0^3 \left[\frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{2} + c_1 \right]_{y=0}^{2x} dx = \int_0^3 \left(8x^2 + 2x^2\right)\,dx \\
&= \left[\frac{8}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^3 + c_2 \right]_{x=0}^{3} = \frac{8}{3}\cdot 27 + \frac{2}{3}\cdot 27 - 0 - 0 \\
&= 8\cdot 9 + 2\cdot 9 = 72 + 18 \\
&= 90
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Absolutbetrag und Polardarstellung der komplexen Zahl:

a) $z = \frac{11+7j}{2-j} - \frac{30+10j}{3-4j}$.

b) $z = je^{\frac{\pi}{2}j} - \frac{1+j}{1-j}$.

c) $z = (e^{\frac{-\pi j}{2}} - e^{\frac{\pi j}{2}})(j - \sqrt{3})$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
z &= \frac{11+7j}{2-j} - \frac{30+10j}{3-4j} \\
&= \frac{(11+7j)(2+j)}{(2-j)(2+j)} - 10\frac{(3+j)(3+4j)}{(3-4j)(3+4j)} \\
&= \frac{1}{5}(22+25j-7) - \frac{2}{5}(9+15j-4) \\
&= 1-j.
\end{aligned}$$

$\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = -1$, $r = |z| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Damit erhält man die Polardarstellung:

$$z = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = \sqrt{2}\,(\cos(-\pi/4) + j\sin(-\pi/4))$$

b)

$$z = je^{\frac{\pi}{2}j} - \frac{1+j}{1-j} = j^2 - \frac{(1+j)(1+j)}{2} = -1-j.$$

$\mathrm{Re}(z) = -1$, $\mathrm{Im}(z) = -1$, $r = |z| = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$.

Damit erhält man die Polardarstellung:

$$z = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = \sqrt{2}\,(\cos(-3\pi/4) + j\sin(-3\pi/4))$$

c) $z = 2 + 2\sqrt{3}j$, $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = 2\sqrt{3}$, $r = |z| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Damit erhält man die Polardarstellung:

$$z = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = 4\,(\cos(\pi/3) + j\sin(\pi/3))$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Mengen: $X \cap Y$, $Y \cup Z$ und $Z \backslash Y$ für

a)

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 7\}, \\ Y &= \{y \in \mathbb{R} | -3 \leq y \leq 3\} \text{ und} \\ Z &= \{z \in \mathbb{R} | 1 \leq z \leq 5\}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 1\}, \\ Y &= \{y \in \mathbb{Z} | -3 \leq y \leq 3\} \text{ und} \\ Z &= \{z \in \mathbb{R} | z \leq 1\}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, \\ Y &= \{y \in \mathbb{R} | |y-1| \leq 2\} \text{ und} \\ Z &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{Q} | 0 < x \leq 10\}, \\ Y &= \{y \in \mathbb{R} | |y-2| \leq 1\} \text{ und} \\ Z &= \{z \in \mathbb{R} | 1 < z < 11\}. \end{aligned}$$

Lösung:

a) $X \cap Y = \{x \in \mathbb{N} | 0 \leq x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$,
$Y \cup Z = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 5\}$,
$Z \backslash Y = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x \leq 5\}$

b) $X \cap Y = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$,
$Y \cup Z = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1 \text{ oder } x = 2 \text{ oder } x = 3\}$,
$Z \backslash Y = \{x \in \mathbb{R} | x < 1 \text{ aber } x \neq -3, x \neq -2, x \neq -1, x \neq 0\}$

c) $X \cap Y = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 3\}$,
$Y \cup Z = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3 \text{ oder } x \in \mathbb{Z}\}$
$Z \backslash Y = \{x \in \mathbb{Z} | x < -1 \text{ oder } x > 3\}$

d) $X \cap Y = \{x \in \mathbb{Q} | 1 \leq x \leq 3\}$,
$Y \cup Z = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 11\}$
$Z \backslash Y = \{x \in \mathbb{R} | 3 < x < 11\}$

Aufgabe 5 Berechnen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 13 \\ 1 & 5 & 31 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

Lösung:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 13 & 1 \\ 1 & 5 & 31 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ -1 \cdot \mathrm{I} \\ -1 \cdot \mathrm{I} \end{array} \quad \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 10 & \text{-8} \\ 0 & 4 & 28 & \text{-8} \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ :2 \\ -2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & \text{-4} \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} -3/8 \cdot \mathrm{III} \\ -5/8 \cdot \mathrm{III} \\ :8 \end{array} \quad \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-9} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} -1 \cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-9} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tabelle mit Werten des Sinus und des Cosinus zu ausgewählten Punkten:

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
$\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tabelle mit Werten des Tangens zu ausgewählten Punkten:

	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\tan x$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Hinweise für die Klausur:

- **Die Klausur findet am Dienstag, den 2.03.2010 von 9:00 - 10:00 Uhr im Raum BI 84.1 statt.**
- Bitte bringen Sie Ihre Immatrikulationsbescheinigung und einen gültigen Lichtbildausweis mit.
- Bitte bringen Sie genügend Papier und Kugelschreiber, Filzstift o.ä mit.
- Es sind weder schriftliche Unterlagen (Bücher, Mitschrift, o.ä) noch elektronische Hilfsmittel erlaubt.
- Bitte erscheinen Sie pünktlich. Sollten Sie zu spät kommen, so erhalten Sie keine zusätzliche Zeit zur Bearbeitung der Klausur.
- Im Krankheitsfalle unbedingt eine Krankmeldung im Prüfungsamt (nicht bei uns!) einreichen.
- Die Klausurergebnisse werden Mitte April ausgehängt (Forumsgebäude, 5ter Stock, vor Raum 501). Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 20.April von 10-12 Uhr im Raum F 501 statt.