Kurvendiskussion

Wozu braucht man eigentlich eine Kurvendiskussion und vor allem: Wie wird sie durchgeführt und wozu macht man Ableitungen und setzt sie dann 0 und so weiter und so fort...

Es gibt viele Fragen, die sich stellen, wenn wir an Kurvendiskussion denken. Ohne großes Geschwafel, hier zu erst die Antwort auf die Frage, wozu man Kurvendiskussionen braucht.

Ein klassischer Fall, wo man Kurvendiskussionen braucht ist die sogenannte „Extremwertbestimmung“. Man versucht zum Beispiel mit gegebenem Material ein Viereck mit möglichst großer Fläche, einen möglichst großen Karton oder was auch immer zu basteln. Wir müssten dazu das vorhandene Material und die gesuchte Größe miteinander in Verbindung bringen. Das macht man mit einer Formel. Und bei dieser Formel müsste dann ein Maximum gefunden werden. Und das macht man dann über Ableitungen. So weit die Erklärung des Sinnes von Ableitungen.

Nun Schritt für Schritt.

Nehmen wir an, wir haben eine Funktion $f(x) = x^2$.

Das Bild dazu kennen wir, es ist die Normalparabel.

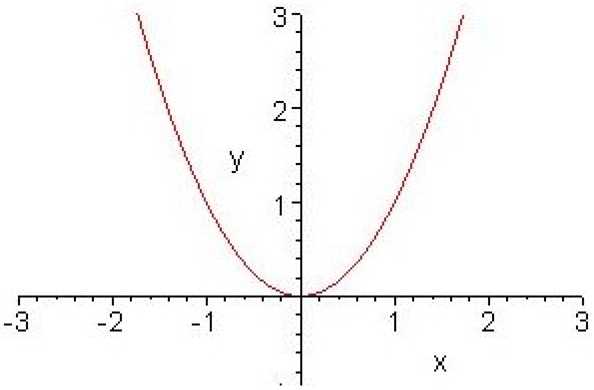

Abbildung 1: Normalparabel

Wir sehen bei dieser Normalparabel, dass sie auf der linken Seite (also bei negativen x-Werten) „nach unten geht“ und auf der rechten Seite (also bei positiven x-Werten) „nach oben geht“. Direkt dazwischen liegt also irgendein besonderer Punkt. Den gilt es schon mal zu untersuchen. Auf der Zeichnung sehen wir diesen Punkt und können ihn der Koordinate (0|0) zuordnen. Aber wie machen wir das ganze rechnerisch?

Wir stellen ja fest, dass dieser Punkt bei (0|0) der tiefste Punkt des gesamten Graphen ist. Wir könnten auch sagen „der Punkt ist extrem tief“. Und er ist eben nicht nur extrem tief, es ist der tiefste. Also vom y-Wert her gesehen das Minimum, da alle anderen Punkte auf dem Graphen eine höhere y-Koordinate besitzen. Wenn wir diesen Punkt suchen, dann suchen wir also das Minimum des Graphen.

Nun müssen wir uns der Ableitung bedienen. Warum?

Überlegen wir erst mal, was eine Ableitung überhaupt ist...

Was ist eine Ableitung?

Die 1.Ableitung eines Graphen ist die Steigung des Graphen.

Dazu am besten einfach mal den Extrakurs zur Ableitung durchlesen.

Schauen wir uns folgendes Bild an:

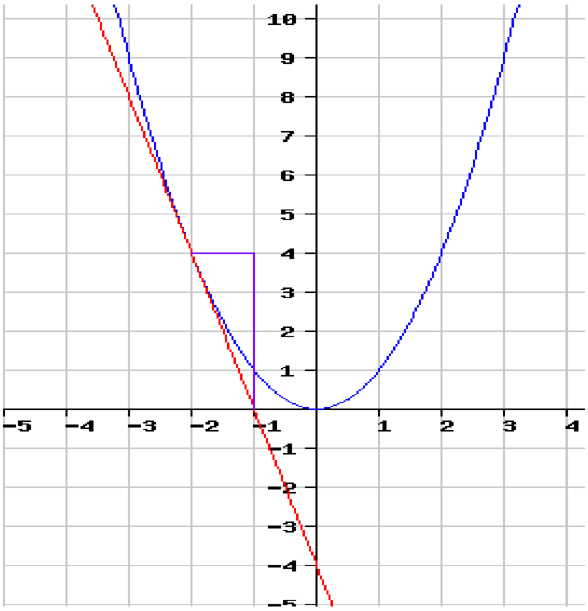

Abbildung 2: Steigung am Punkt (-2/4)

Die rote Gerade ist die Steigung am Punkt (-2/4), welcher zum Funktionsgraphen $f(x) = x^2$ gehört.

Wenn wir uns das lila Steigungsdreieck anschauen, dann sehen wir, dass wir an dem Punkt (-2/4) die Steigung m = - 4 haben.

Schauen wir uns mal einen anderen Punkt an:

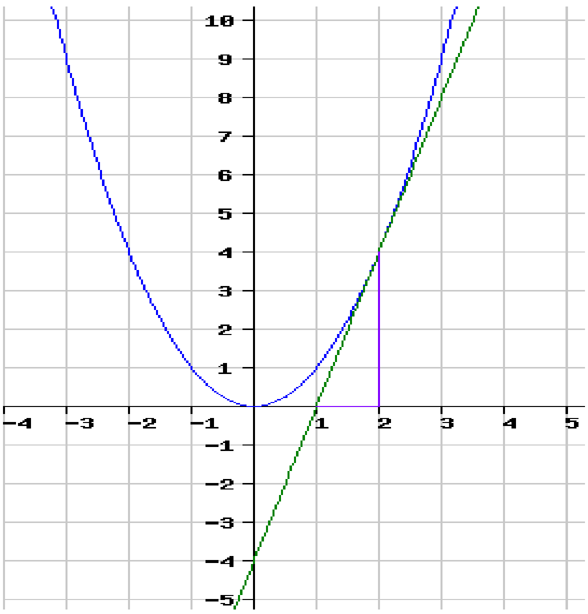

Abbildung 3: Steigung am Punkt (2/4)

Am lila Steigungsdreieck sehen wir: Die Steigung am Punkt (2/4) ist m = 4.

Schauen wir uns noch eine letzte Steigung an:

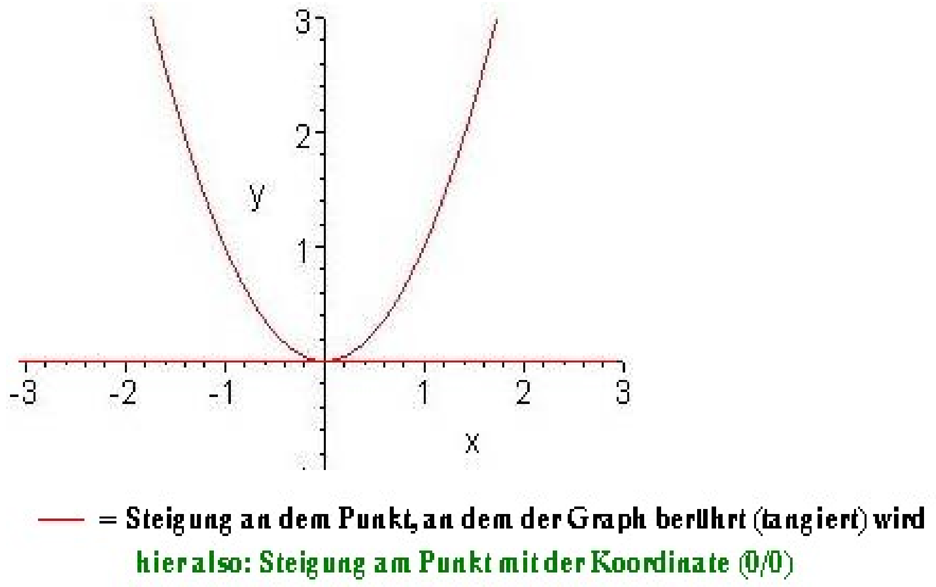

Abbildung 4: Steigung am Punkt (0/0)

Hier lässt sich gar kein Steigungsdreieck einzeichnen, da keine Steigung vorhanden ist, genauer gesagt, hier ist m = 0.

Was stellen wir also fest?

Wir haben uns die Steigungen an den Stellen x = -2, x = 2 und x = 0 angeschaut und festgestellt, dass sich die Steigungen unterscheiden. Also lässt sich feststellen: Die Steigung ändert sich von x-Wert zu x-Wert. Wenn wir uns die Mühe machten und uns jeden x-Wert in gleicher Art zu Gemüte führten und die jeweilige Steigung festzuhalten, dann könnten wir Folgendes machen:

Wir schauen uns die Steigung bei gegebenem x-Wert an, notieren uns die Steigung und machen dann die Zuordnung:

x-Achse	x-Wert
y-Achse	Dazugehörige Steigung

Das ergibt, wenn wir uns ein paar Werte rauspicken, folgende Wertetabelle:

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	- 8	- 6	- 4	- 2	0	2	4	6	8

Tabelle 1: Wertetabelle für 1.Ableitung

Wir können diese Steigungszuordnung auch zeichnerisch darstellen:

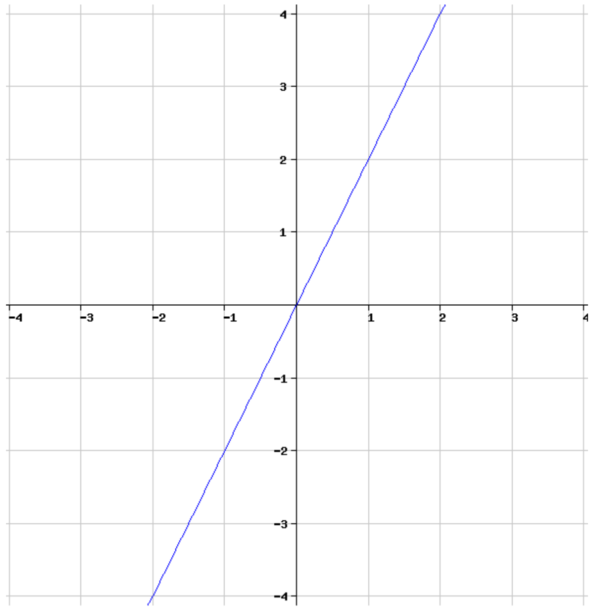

Abbildung 5: (reduzierte) Zeichnung mit Werten aus Tabelle 1

Schauen wir uns Abbildung 4 an, so stellen wir fest, dass die Steigung beim Minimum gleich 0 ist.

Das ist beim Maximum genau so (wird für die 2.Ableitung wichtig).

Wenn wir also wissen, dass die Steigung beim Minimum und beim Maximum, also anders gesagt, bei den Extremstellen, gleich 0 ist, dann dürfen wir die erste Ableitung (also eben die Formel für die Steigung) gleich 0 setzen und schauen, was dann für x rauskommt. Denn dann wissen wir: Bei dem und dem x ist die erste Ableitung (also die Steigung) gleich 0. Und somit haben wir die x-Werte für die Extremstellen gefunden.

Wir leiten also unser $f(x) = x^2$ einfach mal nach allen Regeln der Kunst ab:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

Die erste Ableitung (also die Steigung) ist also 2x.

Halten wir kurz inne:

Was war nochmal Abbildung 5?

Genau, Abbildung 5 war war die zeichnerische Darstellung der Werte aus Tabelle 1. Was war Tabelle 1 nochmal? Genau, das waren die Werte der Ableitungen, also der Steigungen. Somit ist ja Abbildung 5 die zeichnerische Darstellung der Ableitung des ursprünglichen Graphen, also von Abbildung 1. Laut der Rechnung, die wir gerade gemacht haben, ist die Steigung ja $f'(x) = 2x$.

Und tatsächlich, für irgendeinen x-Wert erhalten wir den doppelten y-Wert, also ist der y-Wert bei diesem Graphen (Abbildung 5) der doppelte x-Wert, sprich 2x (diesen Abschnitt ruhig zweimal lesen).

Wir wissen also, dass die Steigung beim Minimum gleich 0 ist.

Wir wissen, dass die Steigung die 1.Ableitung ist.

Wir müssen jetzt also nur noch gucken, bei welchem x-Wert die 1.Ableitung (also die Abbildung 5) den y-Wert (also die Steigung) 0 hat. Zeichnerisch lässt sich das leicht bestimmen. Der Graph hat bei x = 0 die Steigung 0. Und wenn wir uns analog dazu die Abbildung 1 anschauen, stellen wir fest, dass sich genau dort, also bei x = 0, tatsächlich unser Minimum befindet.

So weit das Zeichnerische. Mathematisch ist das ganze nicht viel schwerer.

Wir rufen uns nochmal (!) in Erinnerung, dass Abbildung 5 die 1.Ableitung, also die Steigung ($f'(x) = 2x$) darstellt. Jetzt müssen wir rausfinden, für welchen x-Wert wir den y-Wert 0 erhalten. In anderen Worten: Wir müssen die 1.Ableitung gleich 0 setzen.

Also:

$2x = 0 \qquad | :2$

$x = 0$

Wir erhalten für den x-Wert die 0. Als Koordinate reicht uns nicht nur der x-Wert, wir brauchen auch den dazugehörigen y-Wert. Dazu bemühen wir einfach die Stammfunktion, also unser normales f(x), das ja jedem x-Wert den dazugehörigen y-Wert zuordnet.

Wenn wir bei f(x) also den x-Wert 0 einsetzen erhalten wir für den y-Wert ebenfalls 0:

$f(0) = 0^2 = 0.$

Also ist der Extrempunkt (0|0).

Allerdings ist die 1.Ableitung auch bei einem Maximum gleich 0.

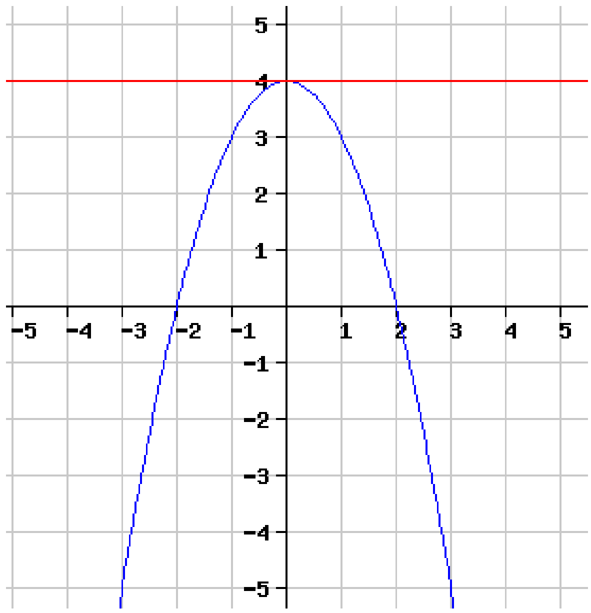

Abbildung 6: Steigung am Maximum bei $f(x) = -x^2 + 4$

Woher bitte soll man denn jetzt wissen, ob die Extremstelle, die man herausgefunden hat, ein Maximum oder ein Minimum ist?

Dazu müssen wir uns einfach mal die 2.Ableitung anschauen, also die Steigung der 1.Ableitung.

Die 2.Ableitung

Machen wir das am bisherigen Beispiel, also die Ableitung der 1.Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$.

Wir schauen uns also die Ableitung der Funktion $f'(x) = 2x$ an.

Abbildung 5 zeigt ja den gezeichneten Graphen. Nun können wir wieder so vorgehen, dass wir für jeden einzelnen Punkt aus diesem Graphen die Steigung bestimmen. Zeichnen wir gleich mal an verschiedenen Stellen Steigungsdreiecke ein:

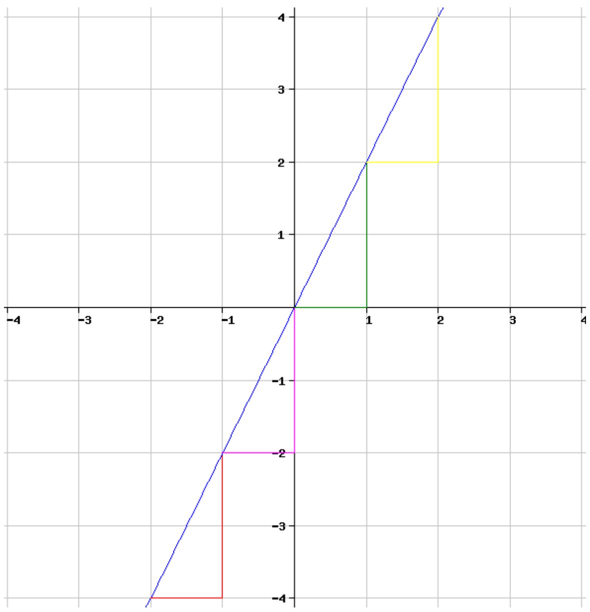

Abbildung 7: $f'(x) = 2x$ mit Steigungsdreiecken an verschiedenen Stellen

Wir sehen, dass es eigentlich relativ egal ist, an welcher Stelle wir ein Steigungsdreieck einzeichnen. An allen Stellen ist die Steigung m = 2. In dieser Zeichnung ist m = m = m = m =2.

Wir sehen in Abbildung 7, dass die y-Werte bei negativen x-Werten negativ sind und bei positiven x-Werten positiv. Wir sehen ja auch, dass die Steigung in Abbildung 2 (stellvertretend für alle negativen x-Werte) negativ und in Abbildung 3(stellvertretend für alle positiven x-Werte) positiv ist. Zwischen den beiden Richtungen, also genau bei 0, ist die Steigung, wie wir in Abbildung 4 sehen, gleich 0. Und genau dieser Steigungsverlauf ist ja in Abbildung 5 (sowie in Abbildung 7) festgehalten.

Jetzt überlegen wir mal:
Wenn die Steigung erstmal negativ ist, dann bei 0 ist und dann positiv wird, dann heißt das ja, dass der Graph (Abbildung 1) erstmal einen Abwärtstrend macht, dann ein Extrempunkt kommt und der Graph dann die Kurve kriegt und aufwärts verläuft.Genau so ist dieser Verlauf der Ableitung zu interpretieren. Und wenn wir uns klar machen was das bedeutet, ist klar, dass es sich um ein Minimum handeln muss!

Wenn der y-Wert nun von negativen zu den positiven x-Werten immer größer wird, dann handelt es sich (s. Abbildung 5 und Abbildung 7) um einen aufsteigenden Graphen. Und bei einem aufsteigenden Graphen ist die Steigung natürlich – genau – positiv.

Um uns die Steigung des Graphen von Abbildung 5 (bzw. 7) anzuschauen, machen wir einfach davon noch eine Ableitung, also eben die 2.Ableitung.

Wir hatten bereits festgestellt, dass die 2.Ableitung in unserem konkreten Fall bei sämtlichen x-Werten gleich 2 ist. Also sieht der Graph der Funktion

$f''(x) = 2$

so aus:

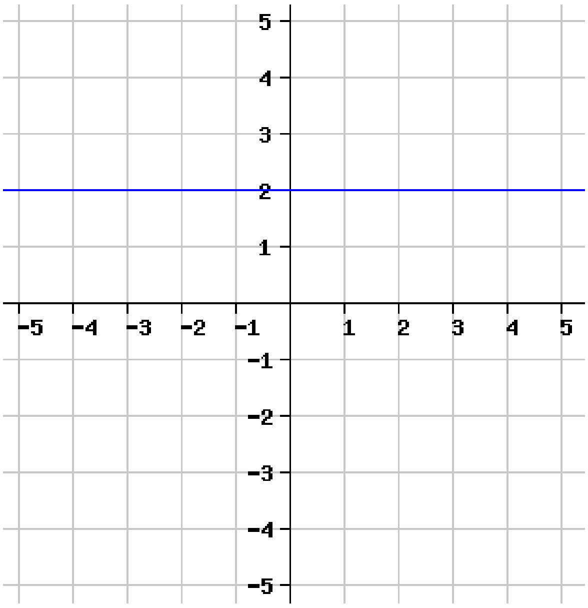

Abbildung 8: f''(x) = 2

Halten wir fest:

- Dieser positive Wert für die zweite Steigung ergab sich nur, weil die erste Ableitung aufwärts ging.
- Die 1.Ableitung ging nur aufwärts, weil die Stammfunktion (von links nach rechts gesehen) erst abwärts, dann aufwärts ging
- Bei der Stammfunktion handelt es sich in Sachen Extrempunkt um ein Minimum.

Und aus diesen Beobachtungen lässt sich schlussfolgern:
Wenn es sich um ein Minimum handelt, so muss die 2.Ableitung positiv sein.

Aber Moment mal:
Es könnte ja auch 2.Ableitungen geben, die, abhängig vom jeweiligen x-Wert ihr Vorzeichen variieren (und die gibt es auch). Das muss natürlich schlussfolgernd genau dann der Fall sein, wenn ein Graph **sowohl Maximum als auch Minimum** enthält. Deswegen ist wichtig: Wir schauen uns die 2.Ableitung an der jeweils untersuchten Extremstelle an.

Soll heißen:Wenn wir gerade durch die 1.Ableitung herausbekommen haben, Dass sich bei x = 2 eine Extremstelle befindet, dann müssen wir bei der 2.Ableitung für das x (ab Stammfunktionen

3.Grades ist auch in der 2.Ableitung noch ein x vorhanden) den x-Wert der jeweiligen Extremstelle einsetzen!

Hier müssten wir also offiziell sagen:
$f''(x) = 2$
Setzen wir für x den x-Wert unserer Extremstelle (in unserem Fall war das die 0) ein:

$f''(0) = 2$.

Und 2 ist ein positiver Wert, also handelt es sich um ein Minimum beim Extrempunkt mit den Koordinaten (0/0).

Jetzt müssen wir also mal ein Gegenbeispiel testen. Wie sieht die 2.Ableitung aus, wenn es sich bei der Stammfunktion in Sachen Extrempunkt um ein Maximum handelt? Wenn das Vorzeichen der 2.Ableitung Klarheit über die Frage nach Minimum oder Maximum schaffen soll, dann müsste sich also die 2.Ableitung bei einem Maximum von der 2.Ableitung im Falle eines Minimums unterscheiden, also negativ sein.

Prüfen wir das ganze also am Graph von Abbildung 6.

Machen wir die ersten beiden Ableitungen inklusive dazugehöriger Bilder:

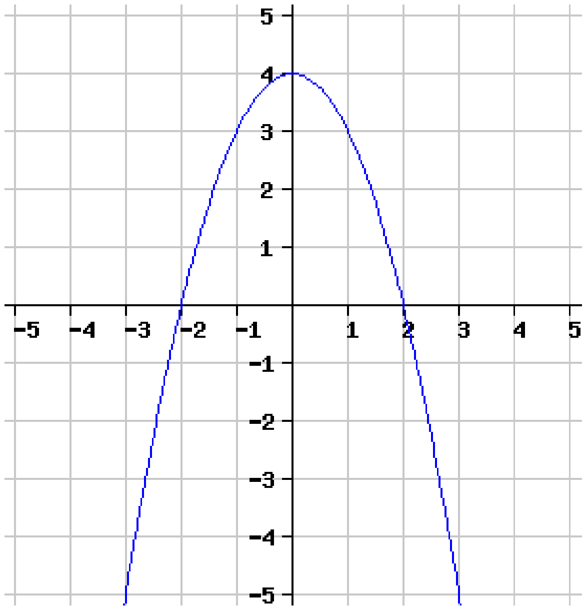

Abbildung 9: Stammfunktion $f(x) = -x^2 + 4$

$f'(x) = -2x$

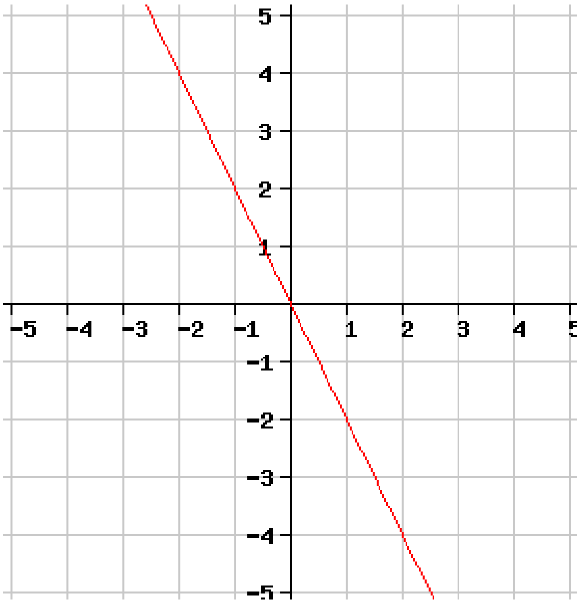

Abbildung 10: 1.Ableitung f'(x) = -2x

Wenn wir hier wieder an verschiedenen Stellen Steigungsdreiecke einzeichnen stellen wir das gleiche fest wie bereits in Abbildung 7: Die Ableitung ist konstant, allerdings diesmal negativ konstant, sie hat nämlich für jeden x-Wert den dazugehörigen y-Wert -2.
Auch an der Stelle x = 0 (was ja auch hier unsere Extremstelle war) ist die 2.Ableitung negativ:

f''(0) = -2.

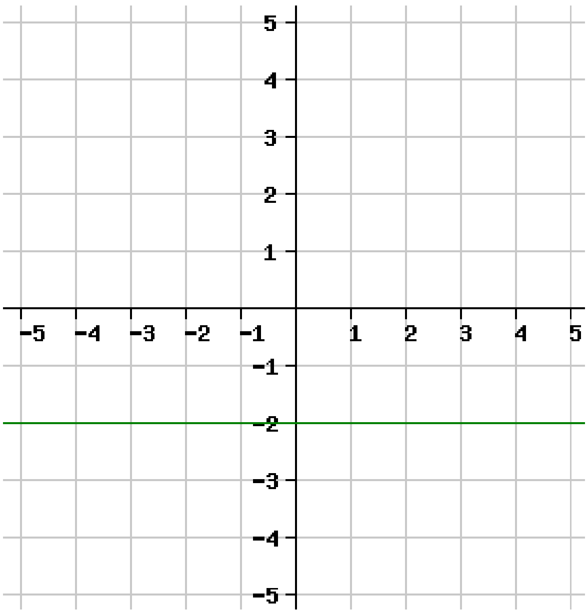

Abbildung 11: f''(x) = -2

Wir halten wieder fest:

- Die 2.Ableitung ist konstant negativ, weil die 1.Ableitung (Abbildung 10) konstant abwärts verläuft.
- Die 1.Ableitung verläuft abwärts, weil die Stammfunktion (Abbildung 9 von links nach rechts gelesen erst eine positive Steigung hat, dann den Extrempunkt erreicht und anschließend abwärts verläuft, also eine negative Steigung hat. Wenn man also von links nach rechts die Steigung am jeweiligen Punkt festhält, ergibt sich eben der Graph in Abbildung 10.
- Beim Extrempunkt der Stammfunktion handelt es sich, wie unschwer zu erkennen ist, um ein Maximum!

Und das war ja genau das, was wir gerade prüfen wollten!

Halten wir fest:

1.) Die 1.Ableitung eines Graphen ist seine Steigung
2.) Die 2.Ableitung ist dem entsprechend die Steigung des ersten Graphen
3.) Um die Extremstellen (also Maximum und/oder Minimum) eines Graphen zu erhalten muss man die 1.Ableitung gleich 0 setzen.
4.) Um zu erfahren, wo genau der/die Extrempunkt/e (Extremstelle gibt nur den x-Wert an während der Extrempunkt die komplette Koordinate enthält) liegt, muss man den/die x-Wert/e in die Stammfunktion einsetzen, dadurch erhält man den/die dazugehörige/n y-Wert/e und hat somit die komplette/n Koordinate/n des/der Extrempunkte/s.
5.) Um zu erfahren, ob es sich beim gefundenen Extrempunkt / bei den gefundenen Extrempunkten um ein Maximum oder Minimum handelt, müssen wir bei der 2.Ableitung für x unsere Extremstellen einsetzen. Kommt ein negativer Wert raus, ist es (wie vorhin bereits hergeleitet und bewiesen) ein Maximum. Kommt etwas Positives raus, ist es ein Minimum!

Geschrieben von Stefan Gelhorn
Hinweise, Fehler und alles, was sonst noch irgendwie helfen könnte bitte an sgelhorn@o2online.de senden.